Université Savoie Mont Blanc,
UFR SceM
INFO602, L3 INFO

April 6, 2020

TD 5, Géométrie algorithmique

Exercice 1. Virage à gauche ou à droite

Soient deux segments consécutifs $[p, q]$ et $[q, r]$. Comment déterminer si on fait un virage à gauche ou à droite ou si on va tout droit ? Est-on obligé de déterminer l'angle ?

Exercice 2. Triangulation d'un polygone simple

Tout polygone simple peut être décomposé en union de triangles, i.e. *triangulé*. Il est possible d'exhiber une triangulation en temps linéaire (Tarjan 1991), mais l'algorithme est difficile. Un algorithme quadratique facile à écrire est basé sur le "découpage d'oreille". Tout polygone simple contient au moins deux oreilles, c'est-à-dire deux segments consécutifs qui tournent à gauche (en supposant que le contour du polygone va dans le sens trigonométrique). On met un triangle à chacune des oreilles, on enlève les deux sommets au fond des oreilles et on relance l'algorithme. Ecrivez donc cet algorithme.

La sortie sera donc une liste de triplets de sommets correspondants aux triangles.

Exercice 3. Test de convexité d'un polygone

Un ensemble C est dit *convexe* ssi $\forall p, q \in C, [pq] \subset C$. On voit alors qu'un polygone simple et son intérieur forme un ensemble *convexe* ssi si les segments font toujours un virage à gauche.

Si on a une liste de points $(p_0, \ldots, p_{n-1})$, est-il suffisant de tester $\textsc{Orientation}(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) \geq 0$ pour tout sommet p_i ? Comment garantir que cela fonctionne ?

Exercice 4. Intersection rayon et segment

Ecrire une fonction HRayon-Intersecte-Segment qui retourne vrai si un rayon $[pq)$ coupe le segment $[r, s]$. Adaptez Intersection-Segments.

Exercice 5. Test intérieur dans un polygone

Un point p est à l'intérieur d'un polygone simple P ssi un rayon partant de lui intersecte un nombre impair de fois le contour. Utiliser la fonction précédente pour trouver un algorithme qui détermine si p est dans l'intérieur de P en temps linéaire.

Exercice 6. Point appartient à un ensemble de points

En utilisant une structure de proximité représentant n points, proposez un algorithme qui retourne vrai si un point donné p est un de ces n points. Quelle est la complexité en pire cas de cet algorithme ?

Exercice 7. Point à distance ϵ d'un ensemble de n points

En utilisant une structure de proximité représentant n points, proposez un fonction qui retourne un point à distance inférieure à ϵ d'un point donné p, ou le point $INVALID$ sinon.

Exercice 8. Plus proches points dans un ensemble de n points

Avec une structure de proximité, déterminez la paire de points les plus proches parmi n points.

Exercice 9. Proximité avec des segments

Comment tester la proximité avec des segments ? Même si cette façon n'est pas optimale, on peut aussi utiliser des kD-tree. L'idée est de placer sur chaque segment suffisament de points. Ensuite, on ne fait qu'un test approximatif pour savoir si l'on est à côté d'un des points du segment. La petite difficulté est de ne pas mettre trop de points. En général, si on veut être sûr de détecter que l'on est à distance ϵ d'un segment, il s'agit de bien choisir le rayon δ des boules placés sur le segment de manière à : (1) ne pas avoir trop de points, (2) garantir que si un des points est à distance inférieur à δ alors la distance au segment est inférieure à ϵ.

Expliquez pourquoi un écart entre les points inférieur à 2ϵ et $\delta = \sqrt{2}\epsilon$ est un bon choix.

On note que l'aire de l'ensemble des points "distance à un segment de longueur l inférieure à ϵ" est de $\pi\epsilon^2 + 2l\epsilon$. Or l'aire de l'ensemble des points "à distance inférieure à $\sqrt{2}\epsilon$ des points répartis comme indiqué sur le segment de longueur l" est de $3\pi\epsilon^2 + l(1 + \frac{\pi}{2})\epsilon$. Le ratio d'aire est de $1,28$ pour des longs segments. On va donc surtout tester les bons segments.

corrections

corrections